Untersuchung einer Untergruppe der unimodularen Picard'schen Gruppe

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

philosophischen Fakultät der Universität Basel

vorgelegt von

Robert Picard

aus Oberendingen (Kt. Aargau)

EDITIONS «ALSATIA» ST-LOUIS

1927

Untersuchung einer Untergruppe der unimodularen Picard'schen Gruppe

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

philosophischen Fakultät der Universität Basel

vorgelegt von

Robert Picard

aus Oberendingen (Kt. Aargau)

EDITIONS «ALSATIA» ST-LOUIS

1927

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dres. Spiess und Mohrmann.

BASEL, den 4. Mai 1926.

Prof. H. RUPE
Dekan

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt:

—

EINLEITUNG.

Seite

Definition der Gruppe . . . . . 5—7

I. TEIL. DIE SUBSTITUTIONEN DER GRUPPE.

a. Die Erzeugenden der Gruppe . . . . . 9—10
b. Die Δ-Gruppe als Untergruppe der Picard'schen Gruppe . . . 10—13
c. Die Arten der Substitutionen in Δ . . . . . 13—20
d. Die eigentliche Diskontinuität von Δ 20
e. Die allgemeine Substitution der Gruppe Δ . . . . . 20—22

II TEIL. UEBER EINE BESONDERE IN Δ ENTHALTENE AUSGEZEICHNETE UNTERGRUPPE.

a Definition der Untergruppe . . . . . 23—27
b. Die Faktorgruppe D_{24} der Δ_{24} 27

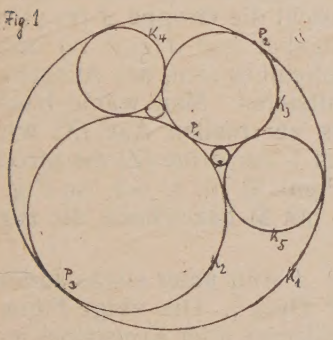
ANHANG.

Frühere Darstellungen der Fig. $\mathfrak{D}$ durch Dyck und Fricke . . . . 29—31

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist der Untersuchung einer speziellen diskontinuierlichen Gruppe linearer Substitutionen einer Variablen gewidmet.

Zu dieser Gruppe gelangt man durch folgende Betrachtung: Man denke sich in der Ebene drei Kreise K_1 K_2 K_3 gelegen (siehe Fig. 1), die sich zu je zweien in der Punkten P_1 P_2 P_3 berühren



Drei solche Kreise sollen kurz als **Kreistripel** bezeichnet werden, die 3 Berührungspunkte als zugehöriges **Punkttripel.** Der Kreis L durch P_1 P_2 P_3 ist der Orthogonalkreis des Kreistripels. Durch die Kreise sind die Punkte, durch die Punkte die Kreise eindeutig bestimmt. Denn es gibt z. B. durch P_1 P_2 bloss einen Kreis K_3, der zu L orthogonal ist. Durch das Kreistripel sind ferner bestimmt die beiden gemeinsamen Berührungskreise K_4 K_5, von denen jeder mit je 2 der Ausgangskreise analoge Tripel bildet. Man stelle fest, dass umgekehrt aus jedem der neuen Kreistripel durch dieselbe Konstruktion das alte hervorgeht. Denn z. B. einer der Berührungskreise des Tripels K_1 K_2 K_4 ist K_3. Konstruiert man weiter zu den neuen Tripeln die Berührungskreise und fährt so fort, so erhält man eine Figur, die unendlich viele sich berührende Kreistripel und zugehörige Punkttripel enthält, und die ich mit $\mathfrak{D}$ (P_1 P_2 P_3) bezeichnen will. Die vorhin festgestellte Tatsache hat nun die wichtige Folge, dass man dieselbe Figur auch erhält, wenn man statt von P_1 P_2 P_3 von irgend einem der genannten Punkttripel P_1' P_2' P_3' ausgeht, das zugehörige Kreistripel K_1' K_2' K_3', seine Berührungskreise konstruiert etc., sodass man sie auch mit $\mathfrak{D}$ (P_1' P_2' P_3') bezeichnen kann.

Betrachtet man nun die Ebene der Figur als die Gaussische Zahlenebene, so gibt es stets eine und nur eine lineare Substitution $V(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$, welche das Tripel P_1 P_2 P_3 in ein bestimmtes anderes Tripel P_1' P_2' P_3' in dieser Reihenfolge überführt. Dadurch gehen aber die Kreise K_1 K_2 K_3 und deren Berührungskreise in die

Kreise K_1' K_2' K_3' und deren Berührungskreise über usw., d. h. die Figur wird durch alle diese Substitutionen V (z) in sich transformiert. Die sämtlichen zu den verschiedenen Punkttripeln der Figur gehörigen Substitutionen bilden daher eine Gruppe, die mit $\Delta(z_1\, z_2\, z_3)$ bezeichnet sein möge, wenn z_1 z_2 z_3 die Koordinaten des Ausgangstripels P_1 P_2 P_3 bedeuten. Umgekehrt ist klar, dass alle Substitutionen erster Art, welche $\mathfrak{D}$ $(P_1\, P_2\, P_3)$ in sich überführen, dieser Gruppe angehören müssen. Denn drei sich berührende Kreise K_1 K_2 K_3 müssen in drei ebensolche K_1' K_2' K_3' übergehen, also P_1 P_2 P_3 in das zugehörige Tripel P_1' P_2' P_3'. So kommt man zu der **Definition: Unter $\Delta(z_1\, z_2\, z_3)$ wird verstanden die Gruppe aller linearer Substitutionen erster Art der komplexen Variablen z, welche die Figur $\mathfrak{D}$ $(P_1\, P_2\, P_3)$ in sich selbst transformiert.**

Ist Q_1 Q_2 Q_3 resp. $(y_1\, y_2\, y_3)$ ein Punkttripel, das der Figur $\mathfrak{D}$ $(p_1\, p_2\, p_3)$ nicht angehört und ist $y = U(z)$ eine Substitution, die $(P_1\, P_2\, P_3)$ in Q_1 Q_2 Q_3 überführt, so ensteht die Gruppe $\Delta(y_1\, y_2\, y_3)$, die zur Figur $\mathfrak{D}$ $(Q_1\, Q_2\, Q_3)$ gehört, offenbar aus $\Delta(z_1\, z_2\, z_3)$ durch Transformation mittelst U. Daher empfiehlt es sich, das Ausgangstripel z_1 z_2 z_3 arithmetisch zu spezialisieren. Man wähle hierfür die Punkte 0, i, ∞, sodass ein Kreis zur reellen Axe (X) wird, ein zweiter (Y) parallel zur Axe durch i, der dritte (Z) die Strecke 0, i zum Durehmesser besitzt. Die Figur $\mathfrak{D}$ (o, i, ∞), (in Fig. 2 dargestellt) werde ich künftig einfach mit $\mathfrak{D}$ bezeichnen, die zugehörige Gruppe bloss mit Δ.

Figur und eine Untergruppe von Δ sind unter etwas anderer Gestalt zuerst aufgestellt worden von Dyck[1]). Die obige Figur 2 vermehrt um die sämtlichen Orthogonalkreise aller Kreistripel wird in Aut. S. 432[2]) als „interessanter Grenzfall" kurz erwähnt. Danach hat Prof O. Spiess, der auf dem vorhin geschilderten Weg von neuem auf die Gruppe Δ geführt wurde, zuerst über die arithmetischen Eigenschaften der Figur und der Substitutionen der Gruppe in der Math. Gesellschaft Basel (November 1923) vorgetragen. Auf die Beziehungen der verschiedenen Auffassungen wird weiter unten eingegangen werden.

Die Arbeit zerfällt in 2 Teile.

Im ersten werden die Substitutionen der Gruppe Δ systematisch untersucht. Als Hauptresultat ergibt sich: **Δ ist eine in der Ebene eigentlich diskontinuierliche Gruppe linearer**

[1]) Dyck: „Ueber die durch Gruppen linearer Transformationen gegebenen regulären Gebietseinteilungen des Raumes", Berichte der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von 1883, S. 61 ff.

[2]) Robert Fricke und Felix Klein, Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Funktionen, Erster Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen Leipzig 1897 S. 431. (Dieses Werk, auf das ich mich noch einige Male beziehen werde, wird künftighin mit „Aut." bezeichnet).

Substitutionen. Sie ist nicht-ausgezeichnet in der sog. Picard'schen Gruppe enthalten und enthält ihrerseits die Modulgruppe nicht-ausgezeichnet, beides von ∞-hohem Index. Die Δ-Gruppe lässt sich analog der Modulgruppe aus bloss **zwei** erzeugenden Substitutionen aufbauen, was zu einer expliziten Darstellung ihrer Substitutionen durch Kettenbrüche führt.

Der zweite Teil ist der Untersuchung einer durch Kongruenzen der Substitutionskoeffizienten definierten Untergruppe gewidmet. Sie erweist sich als eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index 24, deren Faktorgruppe die Oktaedergruppe ist. Der Anhang enthält eine Auseinandersetzung mit den in den Anmerkungen S. 6 zitierten Arbeiten.

I. Teil. Die Substitutionen der Gruppe.

a. Die Erzeugenden der Δ-Gruppe.

Erklärung der Schreibweise. Es seien $V_1 = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $V_2 = \frac{\alpha\,z + \beta}{\gamma\,z + \delta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ zwei lineare Substitutionen. Es bedeutet:

$$V_1\ V_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c; & a b + \beta d \\ \gamma a + \delta c; & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

Ich behaupte nun, dass sich jede Substitution aus Δ aus den drei folgenden Substitutionen zusammensetzen lässt:

1. $S\,(z) = z + 1$; 2. $T\,(z) = -\frac{1}{z}$; 3. $P\,(z) = -z + i$

Es ist ohne weiteres klar, dass S und P zur Gruppe gehören, durch S wird die Figur in sich verschoben, P bedeutet geometrisch eine Inversion am Punkte $\frac{i}{2}$. Auch T gehört zu Δ, denn $(0, 1, \infty)$, ein Punkttripel von $\mathfrak{D}$, wird abgebildet auf $(\infty, -1, -1 + i)$.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass durch S, T, P ein beliebiges Punkttripel $P_1\,P_2\,P_3$ von $\mathfrak{D}$ auf ein beliebiges anderes $Q_1\,Q_2\,Q_3$ von $\mathfrak{D}$ in dieser Reihenfolge abgebildet werden kann. Diese Aufgabe ist gelöst, wenn man jedes Tripel auf $(0, i, \infty)$ abbilden kann; denn wird durch V_1 das erste Tripel, durch V_2 das zweite Tripel auf $(0, i, \infty)$ abgebildet, so bildet $V_1\ V_2^{-1}$ das erste Tripel auf das zweite ab.

Es ist zum Beweis von Vorteil, statt der Punkttripel die zugehörigen Kreistripel zu benutzen, die sich ja gegenseitig eindeutig bestimmen. Ich zeige also, dass irgend ein Kreistripel durch die Substitutionen S, T, P auf X, Y, Z abgebildet werden kann. Es bedeutet X: $y = 0$; Y: $y = 1$; Z: $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Ich unterscheide drei Fälle:

a. Das abzubildende Kreistripel enthalte zwei uneigentliche Kreise, d. h. die Geraden X und Y; dann genügt eine Verschiebung S^{λ} (bei passend gewähltem λ), um das Tripel mit (X, Y, Z) zur Deckung zu bringen.

b. Es sei nur ein Kreis des Tripels eine Gerade. Man kann immer annehmen, dass das die reelle Axe X sei, denn die andere

mögliche Gerade wird durch P auf X abgebildet. Es sei nun $\varkappa$ einer der beiden andern X berührenden Kreise des Tripels. Liegt $\varkappa$ nicht von vornherein im Innern des Einheitskreises E (um 0). so kann dies durch eine passende Verschiebung $S^{\prime}$ erreicht werden. Wird alsdann T angewandt, so geht $\varkappa$ in einen wieder ausserhalb E gelegenen Kreis $\varkappa'$ über, der jedenfalls einen grösseren Radius hat als $\varkappa$. $\varkappa'$ kann mit der Geraden Y identisch sein, dann liegt Fall a. vor. Ist $\varkappa'$ noch ein wirklicher Kreis, so führt die Wiederholung dieses Verfahrens auf sukzessiv grösser werdende Kreise $\varkappa'', \varkappa''' \ldots$. die, solange sie endlich bleiben, immer ins Innere von E gebracht werden können Da nun alle Kreise von $\mathfrak{D}$ völlig getrennt liegen, kann es im Innern von E bloss endlich viele geben. die $> \varkappa$ sind. Daher muss nach endlich vielen Schritten einer der Kreise $\varkappa', \varkappa'', \varkappa''' \ldots$. mit der Geraden Y zusammenfallen, d. h. b. ist auf a. zurückgeführt.

c. Das Tripel enthalte keine Gerade, dann sei $\varkappa$ ein beliebiger der drei Kreise. Durch Anwendung von S, T und P kann $\varkappa$ wie bei b. in eine der Geraden X oder Y übergeführt werden. Das Tripel geht also dadurch in eines von Fall a. oder b. über, kann also schliesslich auf X Y Z abgebildet werden.

Durch das Vorstehende ist bewiesen, dass irgend ein Punkttripel der Figur $\mathfrak{D}$ durch S, T, P als Ganzes in das Tripel $(0, i, \infty)$ transformiert werden kann. Es bleibt noch zu zeigen, dass auch die Reihenfolge beliebig vorgeschrieben werden darf: Jede der 6 möglichen Anordnungen der Zahlen 0, i, $\sim$ kann in jede andere durch blosse Anwendungen der Substitutionen P und T übergeführt werden. Z. B geht

$z = 0, i, \infty$ über in
$0, i, \infty$ durch die Identität
$0, \infty, i$ durch TPT etc.

Es kann also immer erreicht werden, dass $P_1P_2P_3$ in dieser Anordnung in 0, i, $\sim$ und weiter in $Q_1Q_2Q_3$ übergehen. Damit ist die Behauptung bewiesen. Es gilt also der

Satz 1: Die Substitutionen $S = z + 1$, $T = -\frac{1}{z}$, $P = -z + i$ bilden für die Gruppe Δ ein System von Erzeugenden.

b. Die Δ-gruppe als Untergruppe der Picard'schen Gruppe.

Die Determinante jeder der Erzeugenden von Δ ist $= +1$. ($P = -z + i$ muss noch mit $-i$ erweitert werden. $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$).
Die Koeffizienten der drei Erzeugenden sind ganzzahlig.

Die Gesamtheit aller Substitutionen der Determinante $+1$ mit ganzzahligen Koeffizienten bilden nun bekanntlich (siehe Aut.

S. 77) eine Gruppe, die unimodulare Picard'sche Gruppe. Diese wird künftighin nur mit Π bezeichnet. (In Aut. ist dafür die Bezeichnung Γ_2 gewählt). Nach Aut. Seite 87 kann Π durch die folgenden vier Substitutionen erzeugt werden:

1. $z' = -z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ 2. $z' = -z + i = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

3. $z' = -\frac{1}{z}$ 4. $z' = z - 1$

Die Substitutionen 2., 3., und 4. sind nun gerade die Erzeugenden von Δ. Daraus folgt, dass Δ eine Untergruppe von Π ist. Sie fällt nicht mit Π zusammen, denn $z' = -z$ aus Π gehört nicht zu Δ. Diese Substitution bedeutet geometrisch eine Inversion am Nullpunkt. Die Figur $\mathfrak{D}$ wird dadurch in die negative Halbebene gedreht.

Die beiden Substitutionen $S = z + 1$ und $T = -\frac{1}{z}$ sind nun bekanntlich (Mod. Seite 218 ff.)[3]) die Erzeugenden der **Modulgruppe,** (der Gruppe der Substitutionen mit ganzzahligen, reellen Koeffizienten der Determinante $+1$), welche die sogenannte **Modulteilung** der Ebene (siehe Mod. Fig. 36, S. 113) in sich überführt.

Die Modulgruppe ist eine echte Untergruppe der Δ-gruppe von ∞-hohem Index. Der Zusammenhang zwischen beiden Gruppen wird weiter aufgehellt werden, wenn ein Zusammenhang zwischen der Figur $\mathfrak{D}$ und der Modulteilung der Ebene aufgedeckt werden kann.

Jede Modulsubstitution führt die reelle Axe in sich über. Umgekehrt gilt:

Satz 2: Jede Substitution aus Δ, die die reelle Axe in sich überführt, ist eine Modulsubstitution.

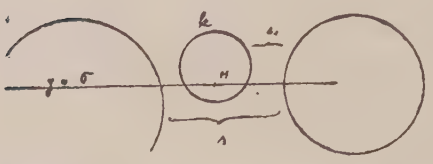
Beweis: Eine Substitution $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus Δ, die die reelle Axe in sich überführt, kann, da V einerseits der Bedingung $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$ genügen muss, andererseits aber als Substitution mit reellen Koeffizienten darstellbar ist, nur die beiden Formen annehmen: a) $V = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$; b) $V = \begin{pmatrix} ia_2 & ib_2 \\ ic_2 & id_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ (alle Koeffizienten a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 reell). Da wegen $\begin{pmatrix} ia_2 & ib_2 \\ ic_2 & id_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix}$ eine Modulsubstitution ist,

[3]) Mit „**Mod.**" wird folgendes Buch bezeichnet: Felix Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Ausgearbeitet und vervollständigt v. Robert Fricke. Erster Band: Grundlegung der Theorie, Leipzig 1890.

und da $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ nicht zu $\mathcal{J}$ gehört (siehe S. 10), ist $\begin{pmatrix} ia_2 & ib_2 \\ ic_2 & id_2 \end{pmatrix}$ keine Substitution der Gruppe.

Eine Substitution aus $\mathcal{J}$, die die reelle Axe in sich überführt, kann bloss noch von der Form a) sein. Das ist nun aber eine Modulsubstitution.

Fig. 5



Da durch die Modulgruppe die reelle Axe in sich transformiert wird, gehen durch eine Modulsubstitution die die Axe berührenden Kreise von $\mathfrak{D}$ in sich über. Diese sind in Fig. 3 gezeichnet. Solche Kreise sollen künftig **affine** Kreise heissen. Daher kann der Satz ausgesprochen werden

Satz 2a: Die Modulgruppe ist definiert als die Gesamtheit aller linealer Substitutionen erster Art, welche Fig. 3 in sich überführt.

Aus Fig. 3 erhält man nun auf folgende Weise die Modulteilung der Ebene Zu jedem Kreistripel, bestehend aus reeller Axe und zwei affinen Kreisen, suche man diejenigen beiden Punkte auf, in denen die das Tripel berührenden beiden affinen Kreise die reelle Axe tangieren (siehe Fig. 4). Jeder Kreis, der in 2 solchen Punkten zur Axe senkrecht steht, ist ein Kreis der Modulteilung. Z. B. aus $(0, 1, \frac{1+i}{2})$ erhält man den Kreis der Modulteilung $x = \frac{1}{2}$. Unterwirft man diesen Kreis der Modulgruppe, so entsteht aus ihm die Modulteilung der Ebene, z. B. durch $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ oder durch $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $x = -\frac{1}{2}$, die mit $x = \frac{1}{2}$ zusammen ein Fundamentaldreieck der Modulteilung bilden.

Wegen der **Konformität** der Modulsub. t. muss jeder Kreis der Modulteilung zu den affinen Kreisen von $\mathfrak{D}$ die gleiche Beziehung haben wie $x = -\frac{1}{2}$. Man erhält die Doppelteilung jedes Dreiecks der Modulteilung, indem man zu jedem Tripel, bestehend aus reeller Axe und 2 affinen Kreisen, den Orthogonalkreis zeichnet. Für X Y Z ist dieser Kreis: $x = 0$

Ich fasse das Bisherige zusammen in die Sätze:

Satz 3: Die $\mathcal{J}$-Gruppe ist eine Untergruppe der unimodularen Picard'schen Gruppe // von ∞-hohem Index.

Satz 4: Die Modulgruppe ist eine Untergruppe der Δ-gruppe von ∞-hohem Index.

Anmerkung: Die Modulgruppe ist diejenige Untergruppe von J, die die reelle Axe in sich überführt. Mit ihr sind gleichberechtigt alle die Untergruppen, die die andern Kreise der Figur $\mathfrak{D}$ invariant lassen. Daraus folgt, dass die Modulgruppe kein Normalteiler von Δ ist.

Satz 5: Jede Substitution V aus J lässt sich darstellen in der Gestalt: $V = M_1 P M_2 P \ldots\ldots M_\lambda P M_{\lambda+1} \ldots\ldots P M_n$ wobei M_λ ($\lambda = 1 \ldots\ldots n$) eine Modulsubst. bedeutet. P kommt nur in der ersten „Potenz" vor, da $P^2 = 1$ ist. Ferner gilt

Satz 6: Die Gruppe J ist keine ausgezeichnete Gruppe von Π.

Beweis: Es lassen sich mit J gleichberechtigte Untergruppen von Π angeben. Man verschiebe $\mathfrak{D}$ längs der imaginären Axe um eine ganze Zahl $(i\,n)$. Die Gruppe, die diese verschobene Figur in sich überführt, ist $(z - i\,n)\ J\ (z + i\,n)$. Sie ist gleichberechtigt mit J und Untergruppe von Π, denn $(z + i\,n)$ gehört zu Π, doch fällt sie mit J nicht zusammen. Sie enthält z. B. für $n = 1$ die Subst. P nicht.

In jedem rationalen Punkte der reellen Axe berührt ein affiner Kreis, denn $z = \infty$, der Berührungspunktfür den Kreis $y = 1$, kann durch Modulsubstitutionen in jeden rationalen Punkt überführt werden. Durch die Modulgruppe geht $y = 1$ in jeden affinen Kreis über.

Nun entsteht irgend ein Kreis K von $\mathfrak{D}$ aus X durch Abbildung mittelst einer linearen Substitution, deren Koeffizienten komplexe ganze Zahlen sind. Daher entsprechen den rationalen Zahlen von X die rationalen Punkte von K, die dann zugleich die Punkte sein müssen, in denen K von den anstossenden Kreisen berührt wird. Dies gibt

Satz 7: Die Berührungspunkte der Kreise von $\mathfrak{D}$ (und keine anderen Punkte der Figur) sind rational.

c. Die Arten der Substitutionen in Δ.

In Π gibt es (siehe Aut. Seite 77):

1. elliptische Substitutionen der Periode 2 und 3
2. parabolische Substitutionen
3. hyperbolische „
4. loxodrome „

Andere Subst. können demnach auch in Δ nicht vorkommen. Andererseits lassen sich nun alle diese 5 Arten in Δ nachweisen. Die Existenz der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Subst. ist bereits dadurch sichergestellt, dass die Modulgruppe in Δ enthalten ist. Das Vorkommen loxodromer Subst. ist noch nachzuweisen. Eine H-Subst. ist dann eine loxodrome (siehe Aut. S. 77), wenn die Summe des ersten und vierten Koeffizienten nicht reell ist. Ist $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine Modulsubst., so ist demnach $PM = \begin{pmatrix} i\alpha ; \alpha - i\beta \\ i\gamma ; \gamma - i\delta \end{pmatrix}$ eine loxodrome Subst., sobald $\alpha \neq \delta$.

Man erkennt leicht, dass die Gesamtheit aller loxodromen Subst. in Δ keine Gruppe bilden; denn sind $L_1 = PM_1$ und $L_2 = PM_2$ zwei loxodrome Subst., so ist $L_1^{-1} L_2 = M_1^{-1} M_2$ eine Modulsubst.; eine solche kann aber niemals loxodrom sein (Mod. S. 181—83).

Bevor ich in der Behandlung der loxodromen Subst. der Δ-gruppe weiterfahre, will ich eine Arteinteilung beliebiger loxodromer Subst. vornehmen.

$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist (siehe Mod. S. 164) loxodrom, wenn bei getrennt liegenden Fixpunkten in dem Ausdruck

$$k = \frac{\left(a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}\right)^2}{4\,(ad - bc)} = \rho e^{i\varphi}$$

sowohl ρ als auch $e^{i\varphi}$ verschieden von $+1$ sind.

Ich heisse eine loxodrome Substitution
zyklisch-loxodrom, wenn φ kein rationaler Teil von 2π ist.
azyklisch-loxodrom, wenn φ ein rationaler Teil von 2π ist.
Z. B. ist $z' = +\rho e^{2i\pi\lambda} z$ azyklisch-loxodrom, wenn $\rho \neq 1$ und λ rational ist. Sei allgemein $\frac{n}{m}$ der rationale Teil von 2π einer azyklisch-loxodromen Subst. L, so ist L^m keine loxodrome, sondern eine hyberbolische Substitution, (wobei m die „Periode" von L heisse); hingegen erhält man aus einer zyklisch-loxodromen Subst. durch Iteration immer wieder loxodrome. Von diesen Sätzen gilt auch die Umkehrung. Es werden sich in Δ sowohl zyklisch- als auch azyklisch-loxodrome Subst. nachweisen lassen.

Der Grund zur Unterscheidung zweier Arten von loxodromen Subst. liegt in ihrem Verhalten zu den Kreisen der Ebene. Nämlich: die zyklisch-loxodromen lassen keinen Kreis invariant, dagegen führt eine azyklisch-loxodrome Subst. der Periode 2, wie z. B. $W = -\rho z$, jeden Kreis durch die Fixpunkte in sich über, wobei jedoch Aeusseres und Inneres vertauscht werden; und bei

den andern von einer Periode $m > 2$ gibt es gewisse Potenzen der Subst., die dies tun. Azyklisch-loxodrome der Periode 2 sind die einzigen loxodromen Subst., die selbst Kreise invariant lassen.

Man bilde $W = S^2 PT S^3 PTS^4 PT = \begin{pmatrix} 1 - 3i; & -1 + 6i \\ -7 - 12i; & +1 + 27i \end{pmatrix}$

Das ist eine loxodrome Subst.: man bestätigt durch einfache Rechnung, dass W^2 eine hyperbolische Subst. ist: **W ist also azyklisch.**

Zum Nachweis zyklisch-loxodromer Subst. verfahre ich so:

Es sei $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine loxodrome Subst. aus Δ. Die Gleichung ihrer Fixpunkte lautet: $\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$.

Die Subst. $V^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die man aus V durch Iteration erhält, muss die gleichen Fixpunkte haben, ihre Koeffizienten genügen den Gleichungen: $c = \lambda \gamma$; $(d - a) = \lambda (\delta - \alpha)$; $b = \lambda \beta$, bei passend gewähltem λ. Aus diesen 3 Gleichungen erhält man mit Berücksichtigung von $\begin{matrix} \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \\ ad - bc = 1 \end{matrix}$ die Beziehung: $(a + d)^2 - 4 = \lambda^2 \left((\alpha + \delta)^2 - 4\right)$

Setzt man für $\alpha + \delta = 1 + i$, was in (PM) z. B. immer zu erreichen ist, so wird $(a + d)^2 - 4 = 2\lambda^2 (i - 2)$. Wenn V^n hyperbolisch sein soll, so muss (Aut. S. 77) $2\lambda^2 (i - 2)$ reell sein; das ist nur möglich für $\lambda^2 = n^2 (-i - 2)$, $(n = \text{reell, ganzzahlig})$, d. h. $(-i - 2)$ müsste ein Quadrat einer ganzen Zahl sein. Nun ist aber der Betrag eins solchen Quadrates eine ganze Zahl. Es ist aber $|-i - 2| = |\sqrt{5}|$

Zu merkwürdigen Verhältnissen kommt man, wenn man nach der Lage der Fixpunkte loxodromer Δ-Subst. fragt. Ein solcher kann nicht im Innern eines Kreises von $\mathfrak{D}$ liegen, denn sonst müsste dieser Kreis in sich übergehen. Es kommt überhaupt nur bei elliptischen Substitutionen vor, dass ein Fixpunkt innerhalb eines Kreises liegt (Mod. S. 170).

Fixpunkte loxodromer Substitutionen können auch nicht auf Kreisen von $\mathfrak{D}$ liegen. Da nämlich ein Fixpunkt einer loxodromen Δ-Substitution irrational ist und sich in solchen Punkten keine Kreise von $\mathfrak{D}$ berühren (Satz 7), so müsste durch eine solche Substitution der Kreis, auf dem dieser Fixpunkt liegt, in sich übergehen. Es könnte sich also nach Seite 13 nur um eine azyklisch-loxodrome Substitution der Periode 2 handeln, wobei die beiden Fixpunkte auf demselben Kreis von $\mathfrak{D}$ liegen würden. Aber auch

dieser letzte Fall ist unmöglich, denn durch azyklisch-loxodrome Substitutionen der Periode 2 wird Aeusseres und Inneres des festbleibenden Kreises vertauscht. Das kann aber bei einer Δ-Substitution nicht vorkommen.

Da die Fixpunkte loxodromer Substitutionen weder auf noch in Kreisen von $\mathfrak{D}$ liegen können, so müssen sie ausserhalb derselben liegen: **Die Ebene wird durch die Kreise der Figur $\mathfrak{D}$ nicht lückenlos bedeckt.** Durch die Existenz solcher Subst. ist also die Existenz solcher Punkte nachgewiesen, die weder in noch auf Kreisen von $\mathfrak{D}$ liegen. Ich werde sie **äussere Punkte** nennen. Sie sollen im folgenden eingeteilt werden. Ich werde zuerst zeigen, dass ihre Koordinaten irrational sind.

Bianchi hat bewiesen (Math. Annalen Band 38, S 313), dass als Erzeugende der Gruppe *II* folgende drei Subst. genommen werden können: 1) $S = z + 1$; 2) $T = -\frac{1}{z}$; 3) $R = z + i$. Eine beliebige Subst. V aus *II* kann demnach so dargestellt werden: $V = M_1 R^{n_1} M_2 R^{n_2} \ldots\ldots R^{nk-1} M_k$ (M_λ = Modulsubst.)

Zuerst will ich die Frage untersuchen, in welche Gestalt $\mathfrak{D}$ durch eine beliebige *II*-Subst. übergeht. Durch M_1 geht $\mathfrak{D}$ in sich über, durch R^{n_1} wird sie längs der imaginären Axe ganzzahlig verschoben. Das Bild von $\mathfrak{D}$ heisse $\mathfrak{D}^*$. $\mathfrak{D}^*$ liegt also jetzt im Innern eines Kreises von $\mathfrak{D}$, nämlich entweder oberhalb $y = 1$ oder innerhalb der negativen Halbebene. Durch eine Modulsubst. M_2 wird nun das Innere dieses Kreises wieder abgebildet auf das Innere eines Kreises von $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}^*$ wird dadurch in das Innere dieses Kreises abgebildet. Durch vollständige Induktion erkennt man, dass das Bild $\mathfrak{D}^{(k)}$ von $\mathfrak{D}$, dass durch V vermittelt wird, im Innern eines Kreises von $\mathfrak{D}$ liegt (oder auch mit $\mathfrak{D}$ zusammenfällt). Angenommen, in m Schritten sei $\mathfrak{D}^{(k')}$ in das Innere eines Kreises von $\mathfrak{D}$ gekommen, so ändert sich das weder durch $R^{n_{m+1}}$ noch durch M_m. In dieser Ueberlegung ist eingeschlossen, dass die Figur $\mathfrak{D}$ mit sich zur Deckung kommt.

Irgend ein Punkt der reellen Axe geht durch eine *II*-Subst. immer nur in Punkte im Innern **(innere Punkte)** oder auf dem Rand von Kreisen von $\mathfrak{D}$ über **(Randpunkte),** insbesondere auch deren rationale Punkte, z. B. $z = \infty$ Umgekehrt lässt sich zu jedem komplexen, rationalen Punkt $\frac{u}{v}$ eine *II*-Subst. angeben, durch die der Punkt $z = \infty$ in $\frac{u}{v}$ übergeht. Sind nämlich u und v relativ prim zueinander (was sich ja immer erreichen lässt), so gibt

es zu u und v immer 2 andere ganze Zahlen s und t, sodass $\begin{vmatrix} u & s \\ v & t \end{vmatrix} = 1$; die Subst. $\begin{pmatrix} u & s \\ v & t \end{pmatrix}$ hat dann die verlangte Eigenschaft. Es gilt demnach:

Satz 8: Die äusseren Punkte sind irrational.

Es fragt sich nun, ob es noch andere ausser loxodromen Substitutionen in $\mathcal{J}$ gibt, die äussere Punkte zu Fixpunkten haben. Parabolische und elliptische der Periode 2 können das niemals sein, da deren Fixpunkte rationale Koordinaten haben. Ebenso sind die elliptischen der Periode 3 ausgeschlossen. Jede zyklische Gruppe der Periode 3 ist innerhalb *II* gleichberechtigt. (siehe Aut. S. 88). Elliptische Modulsubstitutionen haben aber ihre Fixpunkte in Kreisen von $\mathfrak{D}$. z. B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Die beiden Kreise, die aequivalent sind zu den beiden gegenüber einer Modulsubstitution festbleibenden Kreisen von $\mathfrak{D}$. müssen nach den Ueberlegungen von S. 15 in Kreisen von $\mathfrak{D}$ liegen oder mit solchen Kreisen zusammenfallen. Also liegen auch die Fixpunkte elliptischer $\mathcal{J}$-Substitutionen der Periode 3 in Kreisen von $\mathfrak{D}$.

Es bleiben also noch die hyperbolischen Substitutionen zu untersuchen: Man vergleiche die beiden hyperbolischen Substitutionen

$$A = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & ; & 1 \\ 8i & ; & 8 - i \end{pmatrix},\quad B = P\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i & ; & 3 - i \\ 8i & , & 8 - 3i \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Fixpunkte sind gegeben:

$$z = \frac{1}{8} + \frac{4 + \sqrt{15}}{8} i = \frac{1}{8} + \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{60}}{16} i \quad \text{resp. } z = \frac{3}{8} + \frac{4 + \sqrt{15}}{8} i = \frac{3}{8} + \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{60}}{16} i$$

Die Fixpunkte von A liegen auf dem Kreis Z der Figur, die Fixpunke der Figur B liegen sicher nicht auf diesem Kreise, denn bei gleicher Ordinate ist die Abszisse grösser geworden. Wo können nun die Fixpunkte von B liegen?

Liegt der eine, z. B. derjenige oberhalb der Geraden $y = \frac{1}{2}$, auf einem Kreis von $\mathfrak{D}$, so geht dieser Kreis durch B in sich über. Dann muss aber, da es sich um eine hyberbolische Substitution handelt, notwendig auch der andere Fixpunkt, dessen Ordinate $< \frac{1}{2}$ ist, auf demselben Kreis liegen. Dies ist aber nach dem Anblick der Figur völlig ausgeschlossen. Daraus folgt, dass die Fixpunkte von B äussere Punkte sein müssen.

Substitution A kann so dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} i; 1 \\ 8i; 8 \; -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = (P\,T) \begin{pmatrix} -16 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (T\,P)$$

Sie ist also gleichberechtigt mit der Modulsubstitution $\begin{pmatrix} -16 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Dagegen kann B nicht mit einer Modulsubstitution gleichberechtigt sein, denn eine mit einer hyperbolischen Modulsubstitution gleichberechtigte Substitution hat notwendigerweise ihre Fixpunkte auf einem Kreis von $\mathfrak{D}$. Während also die elliptischen und parabolischen Substitutionen von Δ innerhalb Δ gleichberechtigt sind mit denjenigen elliptischen und parabolischen Substitutionen, die schon der engeren Modulgruppe angehören, gilt dies für die hyperbolischen Substitutionen nicht, sondern es gilt der

Satz 9: In Δ gibt es hyperbolische Substitutionen, die nicht mit einer Modulsubstitution gleichberechtigt sind.

Die bisher nachgewiesenen äusseren Punkte sind entweder Fixpunkte loxodromer oder gewisser hyperbolischer Substitutionen, d h Wurzeln von Gleichungen 2^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Punkte solcher Art gibt es jedenfalls bloss abzählbar viele. Dagegen ist leicht zu zeigen, **dass die Menge aller äusseren Punkte die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.** Man ziehe eine zwischen X und Y liegende, zu diesen Parallele $y = \sigma$. Nun wähle man σ so, dass es nicht ein Imaginärteil der Wurzel einer ganzzahligen Gleichung 2^{ten} Grades ist. Die Mächtigkeit dieser Zahlen ist offenber der des Kontinuums gleich. Ein Punkt von $y = \sigma$ kann nicht Fixpunkt einer Substitution aus Δ sein. Zwischen irgend zwei Kreisen von $\mathfrak{D}$ wird $y = \sigma$ von ∞-vielen Kreisen von $\mathfrak{D}$ geschnitten, die sich aber nicht berühren können, da ein Berührungspunkt rationale Koordinaten hat. Ich zeige, dass auf dieser Geraden äussere Punkte liegen. Man betrachte das Geradenstück s auf $y = \sigma$ zwischen zwei Kreisen von $\mathfrak{D}$. (Fig. 5) Die Mitte M von s ist entweder äusserer Punkt oder nicht. Im ersten Fall ist man fertig, sonst betrachte man den Kreis k, auf oder in dem M liegt. Nun greife man das rechts von k liegende Teilstück s_1 von s heraus. Die Mitte M_1 von s_1 ist wieder entweder äusserer Punkt oder nicht. Im zweiten Fall betrachte man den Kreis k_2, in oder auf dem die Mitte M_1 von s_1 liegt, mit dem Teilstück s_2, das nun links von k_2 genommen wird, usw. Man beachte, dass die Geradenstücke abwechselnd rechts und links genommen werden. Man erhält so eine Folge ineinandergeschachtelter Strecken, s, s_1, s_2 . . , die sich auf einen Punkt n zusammenziehen müssen, da die Längen der s, s_1, s_2 . . . gegen 0 konvergieren. Sowohl links wie rechts von n liegen in beliebiger Nachbarschaft

Punkte M_k. Folglich kann n weder im Innern eines Kreises liegen. noch Randpunkt sein, da sonst mindestens eine der beiden Umgebungen von Punkten M_k frei sein müsste.

d. Die eigentliche Diskontinuität von Δ.

In Aut. S. 66 und 77 wird nachgewiesen, dass *II* eine (nur) im Raume eigentlich diskontinuierliche Gruppe ist. Dagegen ist die Modulgruppe *I'* schon in der Ebene eigentlich diskontinuierlich (Mod. S. 208 ff.). Es fragt sich nun, wie es sich mit der Gruppe Δ verhält, die doch zwischen *II* und *I'* steht. Die Gruppe wird sich schon in der Ebene eigentlich diskontinuierlich erweisen, d. h. es wird sich in der Ebene ein Fundamentalbereich von endlicher Fläche angeben lassen.

Unter Fundamentalbereich ist ein nicht abgeschlossener Bereich verstanden, so dass jeder innere Punkt von $\mathfrak{D}$ durch die Gruppe Δ einem inneren Punkt des Fundamentalbereiches aequivalent ist, jeder rationale Randpunkt einem solchen des Fundamentalbereiches. Die irrationalen Randpunkte und die äusseren Punkte werden bei dieser Definition ausser acht gelassen. (vergl. Mod. S. 185).

Alle Substitutionen von Δ, die die reelle Axe in sich überführen, bilden die Modulgruppe (siehe S. 10). Ihr Fundamentalbereich F für die negative Halbebene ist in Fig. 6 angegeben.

F ist zugleich Fundamentalbereich für Δ, wobei den rationalen Randpunkten von $\mathfrak{D}$ $z = \infty$ entspricht. Jeder innere Punkt z von $\mathfrak{D}$ liegt in einem Kreis, der durch ein V (z) auf die negative Halbebene abgebildet werden kann. Zu V (z) gibt es sicher einen durch eine Modulsubstitution aequivalenten in F. z kann aber andererseits nicht zwei durch V_1 resp. V_2 vermittelte Bilder in F haben; $V_1^{-1} V_2$ wäre dann eine Modulsubst., die Punkte des Fundamentalbereiches der Modulgruppe in einander überführen würde. Ausser für $V_1^{-1} V_2 = 1$ ist dies unmöglich. Jeder rationale Randpunkt ist (nach S. 8) aequivalent mit ∞.

e. Die allgemeine Substitution der Gruppe Δ.

Seite 9 wurde gezeigt, dass Δ durch die drei Substitutionen S, T und P erzeugt werden kann. Es ist nun sehr bemerkenswert, dass zum Aufbau der Gruppe schon zwei Substitutionen ausreichen, nämlich die folgenden: $S = z + 1 \quad Q = P T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Der Beweis ist dann erbracht, wenn aus Q und S die beiden Substitutionen P und T, die mit S ein System von Erzeugenden für Δ abgeben, zu bilden sind. Nun ist

$$S\, Q^{-1}\, S^{-1}\, Q\, S = T$$
$$\text{und } Q\, T = P$$

Die allgemeine Substitution ist demnach

$V = S^{n_k} Q S^{n_{k-1}} \ldots S^{n_2} Q S^{n_1} Q S^{n_0}$

n_λ = ganze, rationale Zahl $(= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k)$

Wegen $QS^0 Q = Q^2 = Q^{-1}$ kommt in der obigen Formel auch Q^{-1} vor. Sie ist also tatsächlich die allgemeine Substitution der Gruppe.

Es ist $S^{n_1} Q(z) = \frac{1}{n_1 - i + z}$. In diesen Ausdruck substituiere man wieder eine Substitution der Form $S^{n_k} Q$, etc. Man erkennt:

Satz 10: Eine beliebige Substitution aus Δ lässt sich in einen Kettenbruch der folgenden Form entwickeln:

$$V(z) = \cfrac{1}{(n_1 - i) + \cfrac{1}{(n_2 - i) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{(n_k - i) + z}}}}$$

Das ist die der Modulgruppe (Mod. S. 220) und der Picard'schen Gruppe (Aut. S. 87) entsprechende Entwicklung.

Der allgemeine rationale Randpunkt ist somit gegeben durch:

$$V(0) = \cfrac{1}{(n_1 - i) + \cfrac{1}{(n_2 - i) + \ddots + \cfrac{1}{(n_k - i)}}}$$

Nun handelt es sich noch darum, eine Methode anzugeben, um in praxi zu entscheiden, ob eine vorgegebene Substitution V zu Δ gehört oder nicht. Auf alle Fälle ist dazu notwendig, dass V zu Π gehört.

Satz 11: Eine Substitution $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus Π ist dann und nur dann eine Substitution aus Δ, wenn V (0), V (i) und V (∞) Randpunkte von $\mathfrak{D}$ sind.

Beweis: Es ist gezeigt worden, dass eine beliebige Π-Substitution die Figur $\mathfrak{D}$ entweder ins Innere eines Kreises von $\mathfrak{D}$ bringt oder sie mit ihr zur Deckung bringt. Im ersten Falle muss mindestens einer der drei oben angeführten Punkte ein innerer Punkt sein. Dann kann aber auch V nicht zu Δ gehören. Liegt dagegen keiner der drei angegebenen Punkte im Inneren eines Kreises von $\mathfrak{D}$, so kann die Figur auch nicht im Innern eines Kreises von $\mathfrak{D}$ liegen, d. h. V muss eine Substitution von Δ sein.

Die eingangs dieses Abschnittes gestellte Aufgabe ist also gelöst, wenn für einen beliebigen rationalen Punkt $z = z_1 + i z_2$ entschieden werden kann, ob er Rand- oder innerer Punkt ist.

Nach Satz 8 liegt $z = z_1 + i z_2$ in oder auf einem Kreise $\varkappa$ von $\mathfrak{D}$. Liegt z nicht zwischen $y = 0$, $y = 1$, so ist die Frage schon enschieden. Andernfalls bringe man durch $S^\lambda P$ bei passend gewähltem λ den Punkt z in das Innere des von $y = 0$, $y = {}^1/_2$, $x = {}^1/_2$, $x = -{}^1/_2$ gebildeten Rechtecks, wodurch $\varkappa$ in $\varkappa_1$ übergehe. $\varkappa_1$ liegt dadurch vollständig im Einheitskreise. Nun wende man T an etc. (wie beim Beweis von Satz 1), dann muss $\varkappa$ nach endlich vielen Schritten $\varkappa$ in die reelle Axe und z in ein $z^* = z_1^* + i z_2^*$, dessen Imaginärteil ≤ 0 ist, übergehen. Ist z_2^* negativ, so ist z innerer Punkt; ist $z_2^* = 0$, so ist z Randpunkt.

II. Teil.

Ueber eine besondere, in Δ enthaltene, ausgezeichnete Untergruppe.

a. Definition der Untergruppe.

In Mod S. 270 ff. wird die Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe der Modulgruppe untersucht, die dort mit Γ_6 bezeichnet wird. Jede Subst. ist dadurch charakterisiert, dass

$$\gamma \equiv \beta \equiv 0 \pmod 2$$
$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod 2$$
$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1 \text{ ist.}$$

Die Gruppe kann durch $s(z) = z + 2$ und $t(z) = \frac{z}{2z+1}$ erzeugt werden. (Mod. S. 276)

Im folgenden soll die entsprechende Untergruppe der Δ-Gruppe untersucht werden. Die Gesamtheit der Substitutionen von Δ, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix}$, für die $b_1 \quad b_2 \quad c_1 \quad c_2 \equiv 0$ (mod. 2) ist, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe von Δ, wie durch einfache Rechnung bewiesen werden kann. Diese Untergruppe soll vorerst mit Δ' bezeichnet werden. Wegen $ad - bc = 1$ folgt, dass entweder $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder aber $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ (mod. 2) für eine Δ'-Substitution sein muss. Γ_6 ist in Δ' als grösste reelle Untergruppe enthalten.

Zur Herleitung des Fundamentalbereiches und der Erzeugenden von Δ' hilft folgende Betrachtung: Die negative Halbebene kann mit Hilfe von Γ_6-Substitutionen vollständig überdeckt werden durch Bilder des in ihr gelegenen Teils des Fundamentalbereiches von Γ_6. Eine mögliche Gestalt dieses Fundamentalbereiches ist in Mod. S. 276 angegeben. Der in der neg. Halbebene gelegene Teil heisse $\mathfrak{B}_x$ (Fig 7.) Er hat mit X vier Punkte gemeinsam, von denen drei, nämlich 0, 1, ∞ inbezug auf Γ_6-Subst. nicht äquivalent sind. Die zu X affinen Kreise in diesen Punkten sind:

$$Y: y = 1,\ Z: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\ W: \left(x - 1\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Es ist nun leicht zu zeigen, dass jeder andere zu X affine Kreis als Bild von Y, Z oder W betrachtet werden kann, wobei

die Abbildung vermittelt wird durch eine Subst. aus Γ_6, denn bezeichnet g eine gerade, u eine ungerade Zahl, so gibt es in Γ_6 immer Subst., die einen Punkt der Form

$$z = \frac{g}{u} \text{ in den Punkt } 0$$

$$z = \frac{u}{g} \quad " \quad " \quad " \quad \infty$$

$$z = \frac{u}{u} \quad " \quad " \quad " \quad 1 \text{ überführen, z. B.}$$

gibt es im ersten Fall stets ganze Zahlen g', u', sodass $uu' - gg' = 1$. Alsdann leistet die Substitution $\begin{pmatrix} u & g \\ g' & u' \end{pmatrix}$ das Verlangte. Jede rationale Zahl ist in einer dieser drei Formen enthalten. Nun berührt jeder affine Kreis die reelle Axe in einem rationalen Punkt, kann also durch eine Substitution aus Γ_6 auf einen der Kreise Y, Z, W abgebildet werden, bezw. entsteht aus einem solchen. Entsprechend kann man nun alle zu Y affinen Kreise aus (XZW), alle zu Z affinen Kreise aus (XYW), alle zu W affinen Kreise aus (XYZ) entstehen lassen durch Substitutionen, die in Δ' enthalten sind. Man betrachte z. B. für Y die zu zu Γ_6 äquivalente Gruppe $\Gamma_6^{(y)} = V_y^{-1} \Gamma_6 V_y$ Dabei bedeutet V_y diejenige Substitutution aus Δ, die X mit Y und Z mit W vertauscht. $\Gamma_6^{(y)}$ ist in Δ' enthalten, weil Δ' in Δ ausgezeichnet ist, sie ist also eine in Δ' enthaltene Gruppe, die X, Z, W in alle zu Y affinen Kreise überführt.

Das gleiche gilt für $\Gamma_6^{(z)} = V_z^{-1} \Gamma_6 V_z$ inbezug auf Z;

$\Gamma_6^{(w)} = V_w^{-1} \Gamma_6 V_w$ " " W;

Dabei bedeutet entsprechend V_w diejenige Subst. aus Δ, die X mit W und Y mit Z vertauscht, V_z diejenige Substitution aus Δ, die X mit Z und Y mit W vertauscht. Jeder Kreis $\varkappa'$ von $\mathfrak{D}$, der X, Y, Z, oder W berührt, kann demnach betrachtet werden als Bild von $\varkappa$ ($\varkappa$ = X, Z, Y, W), wobei die Abbildung vermittelt wird durch eine Substitution V aus einer der vier Gruppen Γ_6, $\Gamma_6^{(x)}$, $\Gamma_6^{(z)}$, $\Gamma_6^{(w)}$ und somit aus Δ'. Die drei restlichen der vier oft genannten Kreise gehen in eine Tripel $\varkappa'$ berührender Kreise über. Durch $V^{-1} \Gamma_6^{(x)} V^{+1}$ geht dieses Tripel in die Gesamtheit der $\varkappa'$ berührenden Kreise über. Also gelingt es auch, einen der vier Kreise (XYZW) in einen $\varkappa'$ berührenden Kreis $\varkappa''$ durch eine Substitution aus Δ' überzuführen. Zu jedem solchen $\varkappa''$ lässt sich nun, gleich wie vorhin, die Gesamtheit der Substitutionen aus Δ' angeben, die je einen der vier Kreise (XYZW) in einen jeden berührenden von $\varkappa''$ überführen. Von $\varkappa''$ kann man zu allen seinen affinen aufsteigen usw. Man kann

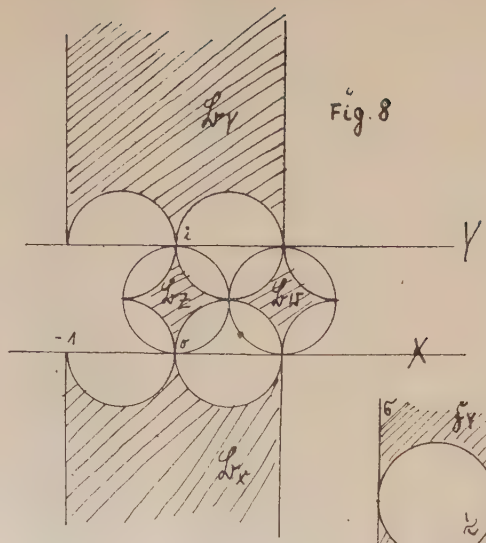


Fig. 8

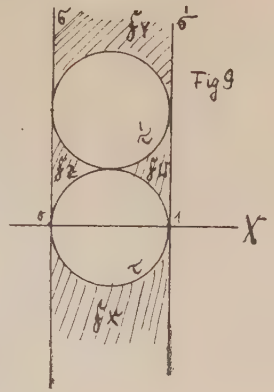


Fig. 9

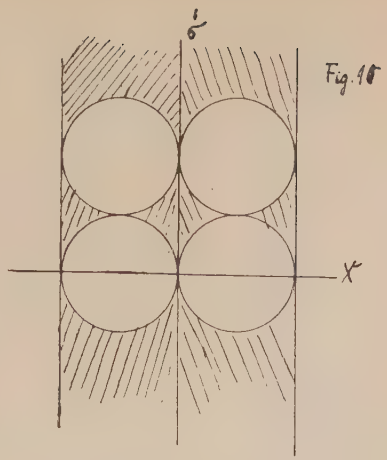


Fig. 10

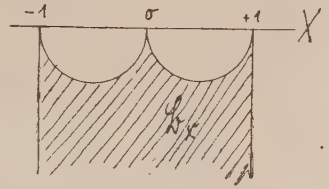
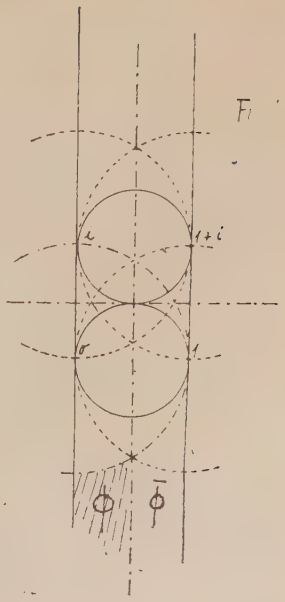


Fig. 7



also jeden Kreis von $\mathfrak{D}$ durch Δ'-Subst., nämlich durch ein Produkt von Subst. aus Γ_6, $\Gamma_6^{(w)}$ . . . . abbilden auf (XYZW).

Ueber das Innere der Kreise ist bislang nichts ausgesagt worden. Durch Γ_6 wird, wie schon erwähnt, die ganze negative Halbebene als Bild von $\mathfrak{B}_x$ überdeckt. Bildet man nun X ab auf Y durch $V^{(y)}$, auf Z durch $V^{(z)}$ auf W durch $V^{(w)}$, so gehe $\mathfrak{B}_x$ über in $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$, $\mathfrak{B}_w$. Ebenso wie die negative Halbebene durch die Bilder von $\mathfrak{B}_x$ überdeckt wird, so auch Y durch die Bilder von $\mathfrak{B}_y$, Z durch die Bilder von $\mathfrak{B}_x$. W durch die Bilder von $\mathfrak{B}_w$, wobei die Abbildung vermittelt wird durch $\Gamma_6^{(y)}$ bezw. $\Gamma_6^{(z)}$ bezw. $\Gamma_6^{(w)}$. Man betrachte jetzt den Bereich:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_x + \mathfrak{B}_y + \mathfrak{B}_z + \mathfrak{B}_w \text{ (Fig. 8).}$$

und wende darauf die Subst. von $\Gamma_6, \ldots \Gamma_6^{(w)}$ in beliebiger Folge an. Aus den bisherigen Betrachtungen geht dann hervor, dass durch die Bilder von $\mathfrak{F}$ nicht nur jeder der Kreise XYZW, sondern schliesslich jeder beliebige Kreis von $\mathfrak{D}$ vollständig überdeckt wird.

Der Bereich $\mathfrak{F}$ kann durch keine Substitutionen aus Δ' auf sich selbst abgebildet werden, denn es gibt in Δ' keine Substitutionen, die X in einen affinen Kreis überführen, Beweis; Solche Substitutionen haben die Form M_1 P M_2 (M_1, M_2 = Modulsubstitutionen). Mit M_1 P M_2 gehört wegen der Auszeichnung von Δ' in Δ auch P M_2 M_1 = P M_3 zu Δ'. Für $M_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ist P $M_3 = \begin{pmatrix} \alpha\, i; \alpha - i\, \beta \\ \gamma\, i; \gamma - i\, \delta \end{pmatrix}$. Dies kann aber in Δ' nicht vorkommen, da $\alpha \equiv 0; \beta \equiv 0$ (mod. 2) gleichzeitig nicht möglich ist. Es gibt in Δ' also auch keine Substitutionen, die irgend einen der vier Ausgangskreise in einen der drei andern überführen würden, denn jede solche Substitution ist gleichberechtigt mit einer M_1 P M_2. $\mathfrak{F}$ kann daher nicht durch Substitutionen aus Δ' auf sich selbst abgebildet werden.

Bisher sind nur solche Substitutionen aus Δ' benutzt worden, die aus Γ_6, $\Gamma_6^{(y)}$, $\Gamma_6^{(z)}$, $\Gamma_6^{(w)}$ bezw. an Kombinationen dieser vier Gruppen entstehen. Die Gesamtheit dieser Substitutionen bildet natürlich eine Untergruppe Δ'' von Δ'. Der Fundamentalbereich von Δ'' ist gleich $\mathfrak{F}$, denn einmal gibt es in Δ'' keine Substitutionen, die $\mathfrak{F}$ auf sich selbst abbilden, da es in Δ' keine solche gibt, und dann kann mit Hilfe von $\mathfrak{F}$ jeder Kreis von $\mathfrak{D}$ durch Δ''-Subst. überdeckt werden.

Nun ist es leicht, die Identität von Δ'' mit Δ' nachzuweisen. $\mathfrak{F}$ ist also Fundamentalbereich für Δ''. Wäre nun Δ'' ein echter Teiler von Δ', so müsste der Fundamentalbereich von Δ' bloss einen

Teil von $\mathfrak{F}$ bedecken. Es müsste also in Δ' Subst. geben, die $\mathfrak{F}$ in sich transformieren. Da solche nicht existieren, folgt, dass $\Delta' = \Delta''$, und dass $\mathfrak{F}$ Fundamentalbereich von Δ' ist.

Da sich Γ_6 aus $s(z) = z + 2$, $t(z) = \frac{z}{2z+1}$ erzeugen lässt, hat man in

$s,\ V_y^{-1} s V_y,\quad V_z^{-1} s V_z,\quad V_w^{-1} s V_w$
$t,\ V_y^{-1} t V_y,\quad V_z^{-1} t V_z,\quad V_w^{-1} t V_w$
$(V_y = PS.\ V_z = TPS^{-1}T,\ V_w = S^{-1} TPSTS)$
ein System von Erzeugenden für Δ'. Setzt man

$p(z) = PTSTP = \begin{pmatrix} -1+2i; & 2 \\ 2 & ; -1-2i \end{pmatrix}$, so ist

$V_y^{-1} s V_y = s^{-1} \qquad V_z^{-1} s V_z = p t \qquad V_w^{-1} s V_w = t^{-1} p^{-1}$
$V_y^{-1} t V_y = s^{-1} p^{-1} \qquad V_z^{-1} t V_z = t^{-1} \qquad V_w^{-1} t V_w = s^{-1} p$

Also gilt **Satz 12: Die Substitutionen s, t, p bilden ein System von Erzeugenden für Δ'.**

Δ' hat den Index 24, denn sein Fundamentalbereich setzt sich aus 4·6 Fundamentalbereichen von Δ zusammen. Man wird demgemäss setzen $\Delta' = \Delta_{24}$. Das Repräsentantensystem der Δ_{24} ist $= G_6 + G_6 TP + G_6 PT + G_6 TPTS$. Dabei bedeutet $G_6 = 1 + TS + ST + S + T + TST$, den Complex der 6 Subst., die das Repräsentantensystem der Γ_6 bilden (Mod. S. 281).

b. Die Faktorgruppe D_{24} der Δ_{24}.

Die Elemente von D_{24} erhält man, indem man die 24 Repräsentanten von Δ_{24} mod. 2 reduziert. Sie setzen sich mod. 2 zusammen aus S, T, P, aber auch aus TS und $(PS^{-1}T)$, es ist nämlich $(PS^{-1}T)(TS) = P$;

$P(TS)(PS^{-1}T)^2(S^{-1}T) = S$; $(TS)(S^{-1}) = T$. Nun ist wegen $(TS)^3 = 1$ TS ein zyklisches Element der Periode 3 und wegen $(PS^{-1}T)^4 = 1$ $PS^{-1}T$ ein zyklisches der Periode 4. Die Oktaedergruppe ist nun gerade dadurch charakterisiert, dass sie und nur sie sich aus zwei solchen Elementen erzeugen lässt[4])

Daher gilt **Satz 13: Die Faktorgruppe der Δ_{24} ist die Oktaedergruppe.**

[4]) H. Weber, Lehrbuch der Algebra Band II, Braunschweig 1899. S. 276 ff.

Anhang.

Frühere Darstellungen der Figur $\mathfrak{D}$ durch Dyck und Fricke.

Die Figur $\mathfrak{D}$ wird, wie schon Seite 3 erwähnt, zweimal in der Literatur kurz behandelt.

Dyck denkt sich eine Kugel, die von den sechs Kanten eines Tedraeders berührt wird. Die Seiten des Tedraeders schneiden auf der Kugel paarweise berührende Kreise aus, die vier Kreisbogendreiecke bilden.

Fricke operiert direkt mit vier einander berührenden Kreisen (Aut. S. 430), die in der Ebene liegen. Diese Kreise, entweder auf der Kugel oder in Ebene, schliessen eine in vier Dreiecke zerfallende Fläche F ein. Die Kreise werden nun auf alle Arten aneinander gespiegelt. Wie man sieht, sind im Prinzip die Methoden der beiden Autoren identisch.

Der Fricke'sche Weg sei etwas ausführlicher bei der folgenden speziellen Lage der vier Ausgangskreise (σ, σ', τ, τ') behandelt. Die Kreise wurden so gewählt, dass Uebereinstimmung mit der Lage der Figur 2 herauskommen wird, die Fläche F ist schraffiert gezeichnet (Fig 9). Die vier Dreiecke, in die sie zerfällt, sind mit F_x, F_y, F_z, F_w, bezeichnet.

σ: $x = 0$ $\qquad$ σ': $x = 1$

τ: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\qquad$ τ': $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Die Spiegelungen werden mit demselben Zeichen wie die Kreise benannt.

Lässt man zunächst einen Kreis, z. B.: τ' ausser Betracht, so schliessen (σ σ' τ) das Dreieck F_x ein, das identisch ist mit dem Fundamentalbereich der $\overline{\Gamma}_6$, der durch Spiegelungen erweiterten Hauptkongruenzgruppe 2^{ter} Stufe der Modulgruppe (Mod. S 270). Spiegelt man die drei Kreise (σ σ' τ) unter sich, so bedecken die Bilder von $\mathfrak{F}_x$ in bekannter Weise die untere Seite der Geraden X (Grenzkreis). Ebenso liefern (σ, σ', τ') den Grenzkreis Y, (σ τ τ') den Grenzkreis Z.

Führt man nun sämtliche Spiegelungen aus, so gehen die Grenzkreise X, Y, Z, W in andere Kreise über, z. B. X durch Spiegelung τ' in den Kreis, der Y, Z, W berührt, kurz, es entspringt die Figur $\mathfrak{D}$, deren Kreise von den Bildern des Bereichs F lückenlos bedeckt werden.

F ist also Fundamentalbereich der Fig. $\mathfrak{D}$ für die Gruppe Σ der Substitutionen zweiter Art ($\sigma\ \sigma'\ \tau\ \tau'$).

Man erhält eine Untergruppe erster Art J', wenn man die Spiegelungen paarweise zusammenfasst. Z. B. wird

$$\sigma \cdot \sigma' = z + 2 = s\,(z); \quad \sigma\,\tau = \frac{x}{2z+1} = t\,(z);$$

$$\tau'\,\sigma = p; \quad \tau'\,\sigma' = p\,s; \quad \sigma'\,\tau = s^{-1}\,t; \quad \tau\,\tau' = t^{-1}\,p^{-1}$$

Jedes gerade Produkt der ($\sigma\ \sigma'\ \tau\ \tau'$) lässt sich durch (s, t, p) ausdrücken, jedes ungerade auf die Form bringen: $\sigma \times$ gerades Produkt. Denn ist die erste Operation nicht gleich σ, so schreibt man:

$$\sigma' = \sigma\,\sigma\,\sigma' = \sigma\,s; \quad \tau = \sigma\,\sigma\,\tau = \sigma\,t; \quad \tau' = \sigma\,\sigma\,\tau' = \sigma\,p^{1}$$

Der Fundamentalbereich von J' muss daher sein: $F + \sigma F$ (Fig. 10) und es ist $\Sigma = J' + \sigma J'$.

Die Substitutionen (s, t, p) bilden also ein System von Erzeugenden der J', sie bilden aber auch dasselbe für die im vorhergehenden Teil behandelte Untergruppe J_{24} der J. **J' ist also mit J_{24} identisch.** Der Fundamentalbereich für J' (Fig. 10) ist durch sogenannte erlaubte Abänderung (Mod. S. 280) leicht mit dem Fundamentalbereich für J_{24} (Fig. 8) zur Deckung zu bringen.

Die Gruppe J_{24} wird jedoch von Fricke nicht explizit erwähnt, er kennt nur die Gruppe der Spiegelungen. Dyck's Interesse geht nur auf die Gebietseinteilung des hyperbolischen Raumes und die nichteuklidischen Bewegungen, die aus den Spiegelungen auf der Kugel entspringen. Auf Arithmetisches gehen beide Autoren nicht ein.

Statt die Figur $\mathfrak{D}$ durch Spiegelungen von vier Dreiecken abzuleiten, kann auch von einem einzigen Dreieck ausgehen. Man ziehe die sechs Höhenkreise, von denen jeder auf zwei der Grundkreise (z. B. τ, τ') senkrecht steht und die beiden andern (z. B. $\sigma\ \sigma'$) im gemeinsamen Berührungspunkt (∞) berührt. Es sind das die nicht ausgezogenen Kreise der Figur 11, durch die jedes Grunddreieck von F (Fig. 9) in sechs kleinere zerfällt. Eines von diesen (z. B. Φ) geht durch die Spiegelungen an diesen Höhenkreisen in alle 24 Dreiecke über. Dass die Gruppe dieser Spiegelungen identisch ist mit der erweiterten Oktaedergruppe erkennt man ohne weiteres so: Verbindet man in Fig. 11 die Punkte $\left(0, 1, \frac{1+i}{2}, 1+i, i, \infty\right)$ durch alle Kreise, die durch vier der Punkte gehen, so erhält man $y = x$, $x + y = 1$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Diese drei Kreise bilden mit den 6 Höhenkreisen zusammen eine Einteilung der Ebene, die, so stereographisch auf eine Kugel projiziert, dass $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ den Aequator, ∞ den Nordpol

und $\frac{1+i}{2}$ den Südpol ergeben, eine Kugeleinteilung bildet, die mit der in Klein, Ikosaeder* beschriebenen Oktaederteilung der Kugel identisch ist.

Die Gruppe der Spiegelungen an den Höhenkreisen entsteht aus drei Erzeugenden, z. B. den Spiegelungen an den strichpunktierten Kreisen. Die Spiegelungen an den ausgezogenen und den nicht ausgezogenen Kreisen zusammen bilden eine Gruppe zweiter Art, deren Fundamentalbereich Φ ist. Die Untergruppe erster Art der Doppelspiegelungen ist gleich J und hat den doppelten Fundamentbereich $\Phi + \bar{\Phi}$.

*) Felix Klein, Vorlesung über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom 5ten Grade S. 15—16.

Lebenslauf.

Ich, Robert Picard, Sohn des Kaufmanns Isaac Picard und seiner Ehefrau Ida, geb. Ullmann, beide wohnhaft in Schopfheim, bin geboren am 11. September 1901 in Schopfheim und heimatberechtigt in Oberendingen (Kt. Aargau).

Ich besuchte von Herbst 1911 bis Ostern 1916 die Realschule in Schopfheim, dann die Obere Realschule in Basel, die ich 1920 mit dem Zeugnis der Reife verliess.

Ich studierte darauf Mathematik, Nationalökonomie und Philosophie
im W.-S. 1920/21 und S.-S. 1921 in Basel;
von W.-S. 1921/22 bis S.-S. 1923 in Göttingen
und von W.-S. 1923/24 ab wieder in Basel.

Ich belegte bei den Dozenten:

In Basel: Barth, Bauer, Joël, Landmann, Mangold, Michels, Mohrmann, Spiess, Wieland.

In Göttingen: Bernstein, Courant, Hilbert, Kneser, Landau, Neder, Nöther, Oldenberg, Meyer, Gudden.

Ostern 1923 bestand ich in Göttingen die Diplomprüfung für Versicherungsverständige in der mathematischen Klasse.

Die vorliegende Arbeit enstand auf Anregung und unter Leitung von Herrn Prof. O. Spiess. Ich bin ihm dafür, wie überhaupt für die mannigfache Anregung und Förderung, die er mir im Laufe meines Studiums gegeben hat, zu grossem Dank verpflichtet.